

揺らぐ成長界面の普遍性 - スケーリングを超えて¹SPEC, CEA-Saclay (France) 竹内 一将²

液晶電気対流の位相欠陥乱流が示す界面成長は Kardar-Parisi-Zhang クラスの普遍挙動を全面的に示すことを報告する。普遍性はスケーリング則だけでなく分布関数等の詳細な性質にまで及び、界面成長というスケール不変な非平衡現象がもつ、強力な普遍性の明確な実験証拠が得られた。

はじめに 20 世紀後半の統計力学において最も理解の進んだテーマの 1 つと言っても過言ではないのが、臨界現象のスケーリング則に代表される、スケール不変な物理現象が平衡状態で示す普遍挙動についてであろう。では非平衡系においては、スケール不変性から如何なる普遍挙動が現れるのだろうか？スケール不変な非平衡現象は臨界現象にとどまらず、発達乱流やパターン形成など多岐に渡るが、ここでは 1 つの代表例として局所的相互作用に起因する界面成長に注目する。

イメージとしては、コーヒーにコピー用紙の縁を浸すとせり上がってくる凸凹の界面を思い浮かべれば良い。同種の荒い成長界面は、燃焼フロント、バクテリアコロニー、材料形成など様々な場面で見られるし、単純な数値モデルでも簡単に観測できる [2]。これら界面の形状は多くの場合スケール不変、より正確には自己アファインであり、界面の凹凸の振幅 w は Family-Vicsek スケーリング

$$w(l, t) \sim t^\beta F(lt^{-1/z}) \sim \begin{cases} l^\alpha & \text{for } l \ll l_*, \\ t^\beta & \text{for } l \gg l_*. \end{cases} \quad (1)$$

に従う [2]。ここで、界面の幅 $w(l, t)$ は界面の高さ $h(x, t)$ の横幅 l に渡る標準偏差として定義され、また、 $z \equiv \alpha/\beta$ として $l_* \sim t^{1/z}$ である。スケール不変な界面成長は 2 つの特徴指数 α と β によって特徴付けられる。

このような界面成長を記述する基本理論は、1986 年に Kardar, Parisi, Zhang (KPZ) が提唱した連続体方程式 [3] で与えられる。KPZ 方程式は 1 + 1 次元では特徴指数を厳密に求めることができ、その値は $\alpha^{\text{KPZ}} = 1/2$ 、 $\beta^{\text{KPZ}} = 1/3$ である [3] が、これは様々な数値モデルが一様に示す値と合致しており、KPZ 普遍クラスをなしている [2]。KPZ クラスは理論的に非常によく調べられ、近年は可解モデルにおける揺らぎの厳密な性質が明らかになるなど更なる注目を集めている [4]。

ところが、実験はというと、残念ながら極めて不透明な状況にある。自己アファインな界面は様々な系で確認されているが、指数 α 、 β の値は多くの場合 KPZ クラスの値とは大きく異なる [2]。著者の知る限り、優に何十とある実験の中で KPZ 指数が見られたものは僅か 2 つ [5]、それも統計精度に限界があって、近年注目されている揺らぎの細かな性質を見ることは不可能である。そこ

¹詳細は原著論文 [1] を参照されたい。また、本実験は東京大学理学系研究科にて著者らが行ったものである。

²E-mail: kazumasa@daisy.phys.s.u-tokyo.ac.jp

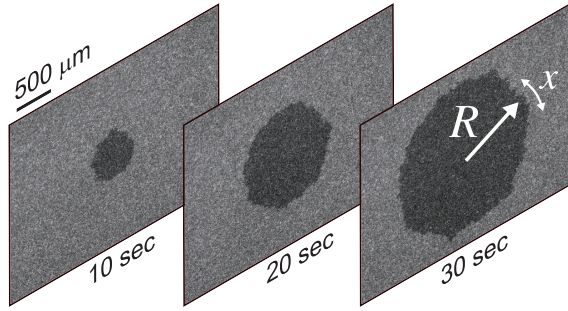


図 1: 成長する DSM2 クラスター。秒数はレーザー打ち込み後の経過時間 t を表す。各時刻 t において、局所半径 $R(x, t)$ を円周に沿った座標 x の関数として定義する。

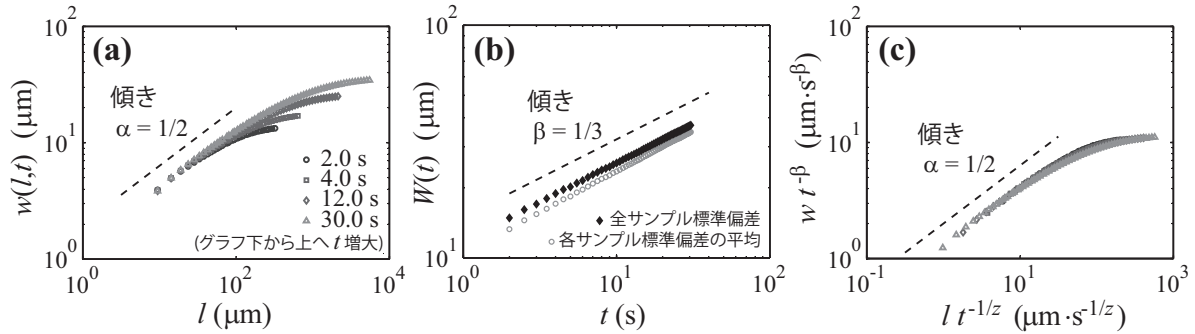


図 2: Family-Vicsek スケーリング。(a) 様々な時刻 t における界面幅 $w(l, t)$ 。(b) 全円周上で測定した界面幅 $W(t)$ 。2つのシンボルは異なる定義の $W(t)$ に対応する。(c) リスケーリングによるデータの重なり。元データは (a)。全グラフにおいて、破線は KPZ クラスの指数の傾きを示す。

で著者は、粗視化したレベルでは比較的単純な成長プロセスを持ち、多数回の測定が容易な、液晶電気対流系の乱流界面に着目して実験を行った。

ネマチック液晶 MBBA を擬 2 次元 ($16 \text{ mm} \times 16 \text{ mm} \times 12 \mu\text{m}$) のセルに封入し、垂直に電圧を印加すると、Carr-Helfrich 不安定性により電気対流が駆動される。ここで低周波数・高電圧では dynamic scattering mode 1 (DSM1) と呼ばれる乱流状態が現れるが、そこに紫外パルスレーザーを打ち込み、DSM2 という、位相欠陥の集団からなる別の乱流状態を生成すると、その界面成長を観察することができる (図 1) [1]。以下では、垂直配向処理を施した液晶セルを温度 25.0°C に保ち、周波数 250 Hz、電圧 26 V で、955 回実験を繰り返して得た結果を報告する。

スケーリング まずは成長する DSM2 クラスターが示す界面荒さのスケーリングについて述べる。界面の局所半径 $R(x, t)$ を図 1 のように定義し、その長さ l に渡る標準偏差として界面の幅を $w(l, t) \equiv \langle \sqrt{[R(x, t) - \langle R \rangle]^2} \rangle_l$ と定義する。ここで $\langle \dots \rangle_l$ と $\langle \dots \rangle$ はそれぞれ、各サンプルの長さ l に渡る平均と、全サンプル・全円周に渡る平均を表す。すると、実験的に測定された界面幅 $w(l, t)$ は図 2(a) のようになり、Family-Vicsek スケーリング (1) の予言するとおりの振る舞いを示す。特に短い長さスケール l での冪成長の指数は $\alpha = 1/2$ であり、KPZ クラスの値に一致する。

時間成長についても同様で、全円周で測定した界面幅 $W(t) \equiv \sqrt{\langle [h(x, t) - \langle h \rangle]^2 \rangle}$ は非常に明瞭に KPZ クラスの冪則 $W \sim t^\beta$ 、 $\beta = 1/3$ を示す [図 2(b)]。ここで、界面成長実験では慣習的に各サンプル毎に測定した標準偏差を平均して W を定義することが多いが、この定義は円形界面では僅かながら有意なずれを生む (同図、 $\beta = 0.351 \pm 0.003$)。正しい定義は全サンプルで一気求める標準偏差 (同図、 $\beta = 0.335 \pm 0.003$) で与えられることに注意されたい。

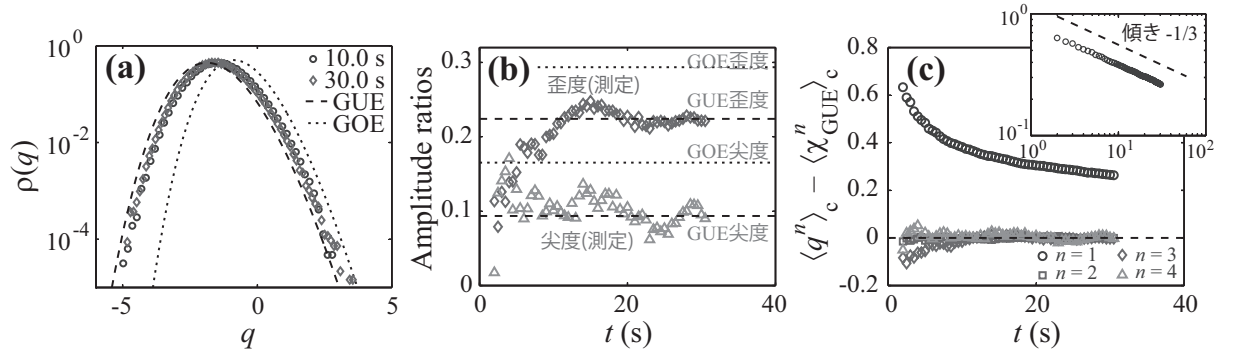


図 3: 普遍揺らぎ分布。(a) リスケールした局所半径 q のヒストグラム。破線、点線はそれぞれ GUE-TW 分布、GOE-TW 分布。(b) 局所半径 R の揺らぎの歪度 $\langle q^3 \rangle_c / \langle q^2 \rangle_c^{3/2}$ と尖度 $\langle q^4 \rangle_c / \langle q^2 \rangle_c^2$ 。ここで $\langle q^n \rangle_c$ は q の n 次キュムラントである。破線・点線は TW 分布の理論値を示す。(c) GUE-TW 分布とのキュムラントの差。挿図は 1 次キュムラントについて同じデータを両対数表示したもの。

2 つの指数 α 、 β の一致は、Family-Vicsek スケーリング (1) に基づくデータのリスケールからも確認できる [図 2(c)]。以上により、DSM2 界面成長のスケーリングは KPZ クラスに属すると結論できる。

普遍揺らぎ分布 上記の結果は、局所半径 R が漸近的に以下の式に従うことを示唆している：

$$R(t) \simeq v_\infty t + (\Gamma t)^{1/3} \chi. \quad (2)$$

ここで、 v_∞ と Γ は定数パラメータで、 χ は確率変数である。詳細は原著論文 [1] に譲るが、著者らはパラメータ v_∞ 、 Γ を実験的に測定し、その値を用いて、リスケールした局所半径 $q \equiv (R - v_\infty t) / (\Gamma t)^{1/3} \simeq \chi$ のヒストグラムを作成した。結果は図 3(a) のとおりで、非ゼロ中心、非対称の特異な揺らぎ分布が現れる。これがガウシアンでないことは明らかだが、実は、図に破線で示した GUE ランダム行列³の最大固有値分布 = GUE Tracy-Widom (TW) 分布 [6] と一致することが判明した。一致の精度は非常に良く、少なくとも 2 次から 4 次のキュムラントまで GUE-TW 分布の値に合致することが確認できる [図 3(b,c)]。さらに、測定データからは有意なずれが認められた 1 次キュムラント、すなわち揺らぎの平均値に関しても、GUE-TW 分布からの差異は $t^{-1/3}$ の冪則に従って減衰する [図 3(c) 挿図]。従って、十分時間が経過すれば、界面揺らぎは GUE-TW 分布に完全に従うのである。

全く異なる文脈で定義される GUE-TW 分布への一致は奇異に思われるかもしれない。これは実際に奇異なのだが、実は KPZ クラスには漸近揺らぎ分布を厳密に計算することができる可解モデル (PNG モデル、ASEP など) が存在し、そこでは異方的ポリマー問題、ランダム順列問題等へのデリケートな数学的マッピングを介した末に、円形界面では GUE-TW 分布が現れると証明されている [4, 7]。これは KPZ クラスに属する他のモデル・現象も共有する普遍揺らぎ分布であると期待されていたが、それが初めて、かつ明瞭に、実験で証明されたことになる。 $t^{-1/3}$ に比例

³GUE=ガウシアン・ユニタリ・アンサンブル。独立なガウシアン確率変数を行列要素の実部・虚部にもつエルミートランダム行列のこと。

する有限時間効果 [図 3(c) 挿図] についても、本実験後に笹本・Spohn による KPZ 方程式の円形界面厳密解で説明がなされた [8]。

更に、詳細は割愛するが、界面揺らぎは分布だけでなく空間相関も普遍的な関数形に一致することが本実験で示され [1]、それはやはりランダム行列理論と密接な関係をもつ。また、この揺らぎ分布と空間相関は、実は界面が円形か平面状かに依存し、それぞれの場合で別個の、しかしながら普遍的な関数形⁴に漸近する [7]。この形状依存性についても本実験で明確な証拠が得られた [1]。

むすびに 以上の実験結果によって、KPZ クラスの界面成長揺らぎには、スケーリング則を超え、分布関数や相関関数の正確な形にまで及ぶ、強力かつロバストな普遍性が存在することが判明した。これは、ランダム行列との意外な関係が実験で目に見えるという楽しさもさることながら、スケール不変な物理現象が非平衡系でも詳細な普遍性を示すという重要な証拠である。現れる普遍揺らぎ分布や空間相関は可解モデルで厳密に導出することはできるものの、一般的に「なぜ普遍的か」「どのくらいロバストか」という素朴な疑問に答え、また形状依存性を取り扱えるような理論的枠組みは未だ存在しない。実験的にも、なぜ他の実験系では極めて稀な KPZ 界面成長が本実験系で明瞭に現れたのか、定性的な考察 [1] 以上の理由は不明である。今後、この物理の構築に向けて実験と理論の両輪で理解を深めていくことが求められる。

本研究の遂行にあたって、佐野雅己氏、笹本智弘氏、Herbert Spohn 氏、Michael Prähofer 氏との議論は不可欠であった。また、TW 分布の理論曲線は Michael Prähofer 氏から頂いた。これらの方々には深く感謝を申し上げる次第である。

参考文献

- [1] K. A. Takeuchi and M. Sano, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 230601; 続報執筆中.
- [2] A.-L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995); T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang, Phys. Rep. **254** (1995), 215.
- [3] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 889.
- [4] T. Kriecherbauer and J. Krug, J. Phys. A **43** (2010), 403001.
- [5] J. Wakita *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **66** (1997), 67; J. Maunuksela *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 1515.
- [6] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Elsevier, Amsterdam, 3rd ed., 2004).
- [7] M. Prähofer and H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 4882.
- [8] T. Sasamoto and H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 230602.

⁴平面界面の揺らぎ分布は GOE-TW 分布、すなわちガウシアン確率変数を行列要素にもつ実対称ランダム行列の最大固有値分布 [図 2(a) 点線] に従う。