

## 界面成長とランダム行列の不思議な関係 ~ 液晶乱流が示す実験証拠 ~

東京大学 理学系研究科 物理学専攻 竹内一将 (TAKEUCHI Kazumasa A.)

**概要** 液晶乱流を舞台に、成長界面の揺らぎがランダム行列理論や可積分系の数理に関わる様々な統計則に従うという実験結果を紹介する。ランダム行列の最大固有値分布や Airy 過程が、スケール不変性のために成長界面の普遍的性質としてロバストに現れる様は極めて非自明である。

## 1 はじめに

本稿で扱うテーマは界面成長である。具体的には、例えば紙の端をインク溜めに浸し、凸凹の界面をなしてインクが染み上がっていく様子を思い浮かべれば良い。このような局所的なプロセスからなる界面成長は自然界に偏在し、森林火災のフロントやバクテリア集団の成長から原子蒸着まで例の枚挙に暇がない [1]。こうした成長界面では、少なくとも理論的・数値的には普遍的なスケールリング則が成り立つことは以前から知られていた [1, 2] が、ここ 10 年ほどの数理物理の進展により、スケールリングだけでなく揺らぎの分布や相関といった詳細な統計的性質にも普遍性が現われ、しかもそれがランダム行列理論や可積分系の数理と直接関係をもつという驚くべき成果が相次いで報告された (最近のレビューは文献 [3, 4] を参照)。本稿では、著者が行った液晶乱流の界面成長実験の結果 [5-7] を軸に、近年注目を集めている界面普遍揺らぎの中心的成果の概観を試みる<sup>1</sup>。

界面の普遍揺らぎに関する一連の研究の背景にはスケール不変性という概念がある。冒頭で紹介した成長界面は、多くの場合まさにスケール不変であり、一部分を拡大しても全体と同じ統計則が成り立つ。こうしたスケール不変な現象の物理学は、臨界現象やブラウン運動に代表されるように平衡系では大変よく調べられており、スケール不変性から系の詳細に依らないマクロな普遍性がいかにして生まれるかよく理解されている。その普遍性が非平衡系でどれだけ有効か、また非平衡固有の興味深い性質は存在するのか — こうした素朴な疑問に答えるべく活発に研究され、かつ近年劇的に理解が進んでいるのが、界面の普遍揺らぎなのである。

## 2 実験系

本稿で紹介する実験は、ある種のネマチック液晶を薄い対流セルに封入し、垂直に電圧を印加したときに観察される、液晶電気対流 [8] と呼ばれる現象である。高い電圧を印加した状態でセルに紫外パルスレーザーを打ち込むと、DSM1 と呼ばれる乱流状態から DSM2 という新たな乱流が核生成し、それが周りの DSM1 乱流を侵食して成長していく (図 1 および文献 [6] の Supplementary Movies 1, 2)。この際、レーザーを一点に照射すれば円形界面が [図 1(a)]、線状に照射すれば平面界面が作れる [図 1(b)] ので、界面成長のスケールリング則および普遍揺らぎが界面形状にどう依存するかも調べることが可能である。

DSM1 と DSM2 の違いは、disclination と呼ばれる、液晶配向の位相欠陥ループの密度にある。DSM2 はこの位相欠陥が大量に密集した状態であり、系に十分な電圧が印加されていれば、この

<sup>1</sup>なお、図を含む本稿の基本的内容は原著論文 [6] を基にしており、著作権規定の下に転載していることを断っておく。また、ページ制限の都合で詳細を省いた箇所も多々あるので、詳しくは原著論文 [5-7] を参照されたい。ただし、引用文献については、本稿で最新の理論的成果も含めるように努めた。

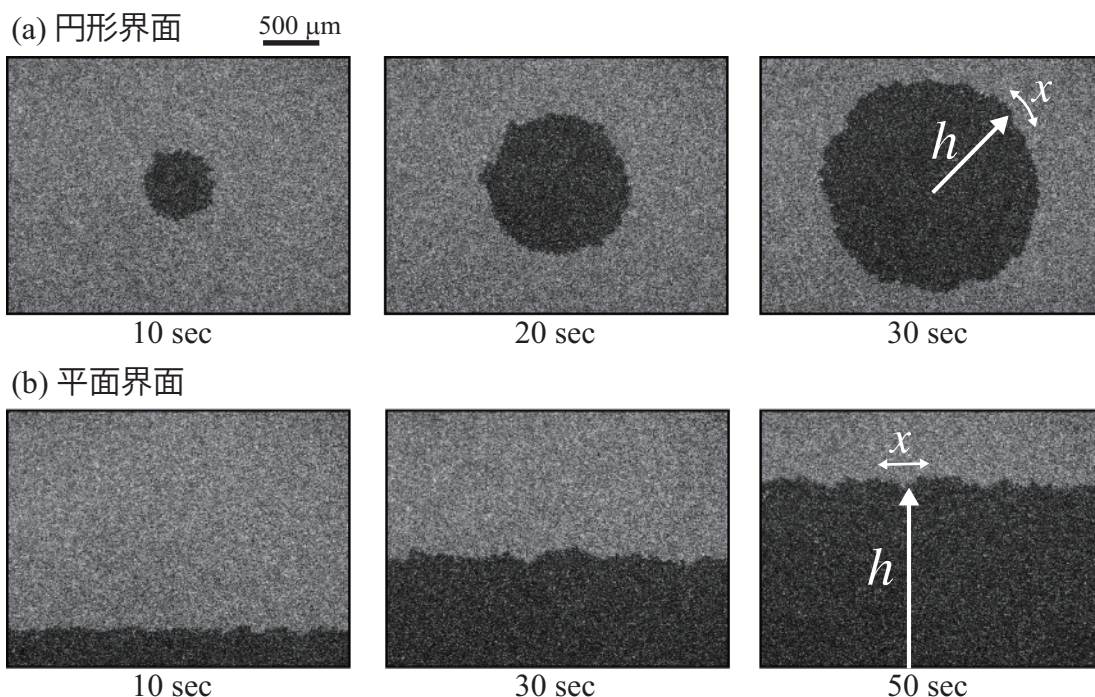


図 1: 円形界面 (a) および平面界面 (b) をもつ DSM2 成長クラスター (黒)。時刻はレーザー照射からの経過時間を指す。界面高さ  $h(x,t)$  は、界面の平均的形状に沿って定義した座標  $x$  の関数である。文献 [6] の Supplementary Movies 1、2 も参照。

位相欠陥が周りの乱流場によって伸ばされ、ちぎられ、輸送されることで、数を増やしながらか周囲に広がっていく。このことから、DSM2 の界面成長は局所的な成長過程であり、また系が至る所乱流状態であるから、セルの不均一性などの quenched disorder は働かない。さらに、電圧のオンオフでいつでも初期状態に戻し、レーザーを打ち込んで界面成長を始められることから、同一の実験状況で多数回の測定が可能である。以上の特長により、本系では自然界や先行研究 [1] における他の様々な界面成長よりも遙かに理想的な環境で、また統計的に精確な結果が得られると期待できる。

以下では、無電圧状態で液晶分子がセル面に垂直に配向するよう表面処理した対流セル (大きさ  $16 \text{ mm} \times 16 \text{ mm} \times 12 \text{ } \mu\text{m}$ ) にネマチック液晶 MBBA を封入したものをを用い、温度を  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ 、電圧を  $26 \text{ V}$ 、 $250 \text{ Hz}$  で一定に保って、波長  $355 \text{ nm}$  の紫外レーザーパルス照射して生成した界面成長について報告する。界面サンプルの数は円形界面が 955 個、平面界面が 1128 個であり、以下の解析はこれを全て用いて得たものである。

### 3 スケーリング則

実験的に得られた界面 (図 1) を観察すると、界面には無数の凹凸があり、確かに荒い界面成長が実現していることがわかる。そこで荒さを定量化するため、まず界面高さ  $h(x,t)$  を界面の成長方向 (円形界面なら動径方向) に、横座標  $x$  の関数として定義する (図 1)。そして、横向きの長さ  $l$  の断片に対して  $h(x,t)$  の標準偏差  $w(l,t) \equiv \langle \sqrt{[h(x,t) - \langle h \rangle_l]^2} \rangle_l$  を測ることで、界面の幅  $w(l,t)$  を定義する。ここで、 $\langle \dots \rangle_l$  は長さ  $l$  の断片内での平均を表し、 $\langle \dots \rangle$  は界面全体および全サンプルを用いた平均を意味する。この  $w(l,t)$  が界面荒さの指標となる [1]。

円形界面と平面界面のそれぞれについて、いくつかの時刻  $t$  で測定した界面の幅  $w(l,t)$  を図 2(a,b)

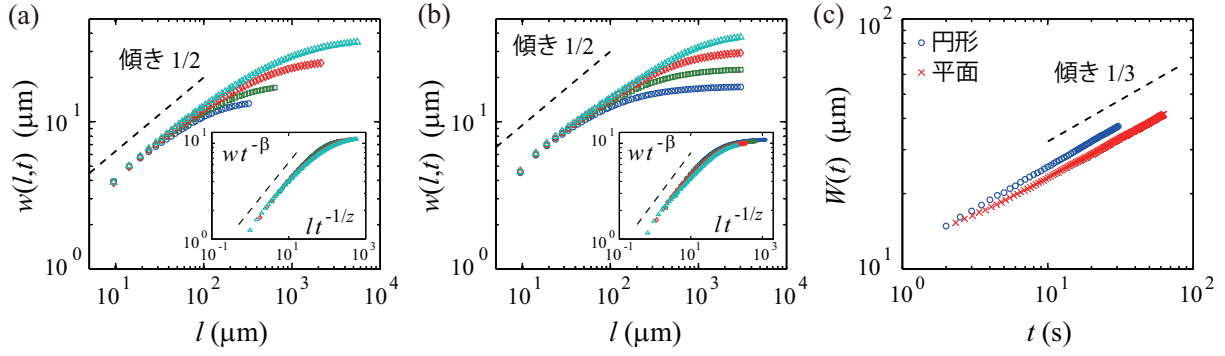


図 2: Family-Vicsek スケーリング。 (a,b) いくつかの時刻  $t$  における界面の幅  $w(l,t)$  の様子 [ (a) 円形界面、 (b) 平面界面 ]。 4 つのデータは、下から上へ、  $t = 2.0$  s,  $4.0$  s,  $12.0$  s,  $30.0$  s [ 円形界面 (a) ] および  $t = 4.0$  s,  $10.0$  s,  $25.0$  s,  $60.0$  s [ 平面界面 (b) ] で得られたものである。挿図には、同じデータがリスケールによって互いに重なるさまが示されている。 (c) 界面全体を用いて計算した界面幅  $W(t) \equiv \sqrt{\langle [h(x,t) - \langle h \rangle]^2 \rangle}$  の時間変化。図 (a-c) で破線は KPZ クラスの特徴指数  $\alpha, \beta$  の値を示している。

に示す。各時刻毎に界面幅  $w(l,t)$  を見ると、長さスケール  $l$  の小さいところでは冪的に成長  $w \sim l^\alpha$  し、長さ  $l$  が大きくなると時刻毎に異なる一定値に収束していることがわかる。このマクロな界面幅の時間依存性を調べるため、界面全体に対する幅  $W(t) \equiv \sqrt{\langle [h(x,t) - \langle h \rangle]^2 \rangle}$  を定義して測定したものが図 2(c) であり、今度は時刻に対して冪則  $W \sim t^\beta$  を示す。以上の振る舞いは Family-Vicsek スケーリング [9] と呼ばれており、正確には

$$w(l,t) \sim t^\beta F(lt^{-1/z}) \sim \begin{cases} l^\alpha & \text{for } l \ll l_*, \\ t^\beta & \text{for } l \gg l_*, \end{cases} \quad (3.1)$$

と書かれる。ここで、 $\alpha, \beta$  は特徴指数、 $F(\cdot)$  はスケーリング関数、 $l_*$  はクロスオーバー長であり、動的指数  $z \equiv \alpha/\beta$  を用いて  $l_* \sim t^{1/z}$  のようにスケールする。実際に実験データ [ 図 2(a,b) ] を見ると、クロスオーバー長  $l_*$  が時刻  $t$  とともに増大する様が確認できる。

ここで界面のスケール不変性から、これら冪則を特徴付ける指数  $\alpha, \beta$  が系の詳細によらず普遍的ではないかと期待できる。事実、Kardar, Parisi, Zhang (KPZ) は成長界面が一般に従うと期待される連続体方程式 (KPZ 方程式)

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x,t) = v \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \xi(x,t), \quad (3.2)$$

$$\langle \xi(x,t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(x,t) \xi(x',t') \rangle = D \delta(x-x') \delta(t-t'). \quad (3.3)$$

を提唱し、それに動的繰り込み群の手法を使って解析した結果、(1+1)次元の界面、すなわち二次元平面内での界面成長では  $\alpha = 1/2$ 、 $\beta = 1/3$  を得た [1,2]。この値は実際に数多くの数理モデルで解析的・数値的に確認されており、KPZ ユニバーサリティクラスと呼ばれている [1,2]。そして、我々の実験データにおいても、図 2 の冪則は空間方向で指数  $\alpha = 1/2$ 、時間方向で  $\beta = 1/3$  となっている (図 2 の破線)。さらに、Family-Vicsek スケーリング (3.1) の関数形を念頭に、図 2(a,b) に示した界面の幅  $w(l,t)$  を縦軸  $wt^{-\beta}$ 、横軸  $lt^{-1/z}$  にリスケールしてプロットし直すと、異なる時刻のデータが一本の曲線  $F(\cdot)$  上に重なることが確認できる。以上から、DSM2 界面成長のスケーリング則も KPZ クラスに属することが確認された。また、スケーリング指数の値は円形界面でも平面界面でも同一であることがわかる。

なお、KPZ クラスは理論的・数値的には様々なモデルや（界面成長にとどまらない）現象で広く確認されているが、実験的にはむしろ例外的にしか見られていないことを注記しておく。冒頭で紹介した紙へのインクの染み込みなど、多くの実験では KPZ クラスとは有意に異なる指数が得られている [1]<sup>2</sup>。著者の知る限り、KPZ クラスの指数が直接見られている実験は、変異種バクテリア [10] またはペロ細胞（真核細胞） [11, 12] のコロニー成長と紙の遅い燃焼 [13, 14]、そして本実験 [5–7] だけである。中でも本実験は、前節で紹介したとおり統計精度の高いデータが得られ、理論的に強い関心を集めている、スケーリング則を超えた詳細な普遍法則 [3, 4] を検証できる希少な系である。それが次節のテーマである。

#### 4 界面揺らぎの普遍分布と界面形状依存性

前節で見たスケーリング則の結果から、本実験における界面高さ  $h$  は、次式のように、一定速度の線形成長項と  $t^{1/3}$  に比例する確率的な揺らぎ項からなるものと考えられる：

$$h \simeq v_{\infty}t + (\Gamma t)^{1/3}\chi. \quad (4.1)$$

ここで、 $v_{\infty}$  と  $\Gamma$  は定数パラメータ、 $\chi$  は界面揺らぎを表す確率変数である。著者らは実験的に二つのパラメータ  $v_{\infty}$  と  $\Gamma$  の値を決定し [5–7]、それをを用いてリスケールした界面高さ  $\chi = (h - v_{\infty}t)/(\Gamma t)^{1/3}$  のヒストグラムを作成した。その結果が図 3(a) である。驚くべきことに円形界面と平面界面は明らかに異なる揺らぎ分布を示しており、いずれも中心がゼロからずれ、対称でもない。定量化のため、界面高さの 2 次から 4 次までのキュムラント  $\langle h^n \rangle_c$ 、具体的には、 $\delta h \equiv h - \langle h \rangle$  として、 $\langle h^2 \rangle_c \equiv \langle \delta h^2 \rangle$ 、 $\langle h^3 \rangle_c \equiv \langle \delta h^3 \rangle$ 、 $\langle h^4 \rangle_c \equiv \langle \delta h^4 \rangle - 3\langle \delta h^2 \rangle^2$  を測定し、それから歪度  $\langle h^3 \rangle_c / \langle h^2 \rangle_c^{3/2}$  と尖度  $\langle h^4 \rangle_c / \langle h^2 \rangle_c^2$  を計算する。これら振幅比は界面揺らぎ  $\chi$  のキュムラントを用いて計算したものと等しく、従ってパラメータの値には依存しない統計量であるが、それをプロットしたものが図 3(b) である。円形界面（青色記号）と平面界面（赤色記号）の歪度（ $\square$ ）と尖度（ $\times$ ）はいずれも、十分時間が経過した後ではゼロから有意に異なり、また互いにも別個の値を取る。従って円形界面と平面界面は別種の非ガウス揺らぎを示していることがわかる。

実は、図 3(a) で見た実験データは、個別のフィッティングパラメータなしに、破線・点線で示した、ランダム行列理論 [15, 16] におけるガウシアン・アンサンブルの最大固有値分布、別名 Tracy-Widom 分布 [17, 18]（次節参照）とほとんど一致している。Tracy-Widom 分布にはアンサンブルの種類によって何種が存在するが、円形界面のデータ（中塗り記号）は Gaussian unitary ensemble (GUE)、すなわち複素エルミート行列の最大固有値分布（破線）に、平面界面のデータ（中抜き記号）は Gaussian orthogonal ensemble (GOE)、つまり実対称行列の最大固有値分布（点線）と一致している。実験データと Tracy-Widom 分布の理論曲線との一致は、僅かな横方向のずれを除けば、確率分布の値にして  $10^{-5}$  付近にまで及ぶ。

次に、図 3(a) で確認された僅かな横方向のずれを検討するため、界面揺らぎの実験値  $\chi$  と Tracy-Widom 分布に従う確率変数  $\chi_{\text{GUE}}$ 、 $\chi_{\text{GOE}}$  を比較して、 $n$  次キュムラントにおけるずれの時系列をとったものが図 3(c,d) である（それぞれ円形、平面界面に対応）。これを見ると、双方とも、2 次から 4 次のキュムラントは実験開始後まもなく一致しているのに対し、1 次キュムラント、すなわち平均のずれは大きく、ヒストグラムで見られた横方向のずれに対応する結果となっている。しかし、ずれの大きさは時間と共に減少しており、同じデータを両対数プロットで表示してみると実ははっきりと  $t^{-1/3}$  に比例して冪的に減衰していることがわかる [図 3(c,d) 挿図]。すなわち、 $t \rightarrow \infty$  では、円形界面の揺らぎ分布は GUE Tracy-Widom 分布に、平面界面の揺らぎ分布は GOE

<sup>2</sup>原因としては quenched disorder や長距離的な相互作用などが議論されているが、KPZ クラスにならない理由がはっきりとはわからない実験も多い。



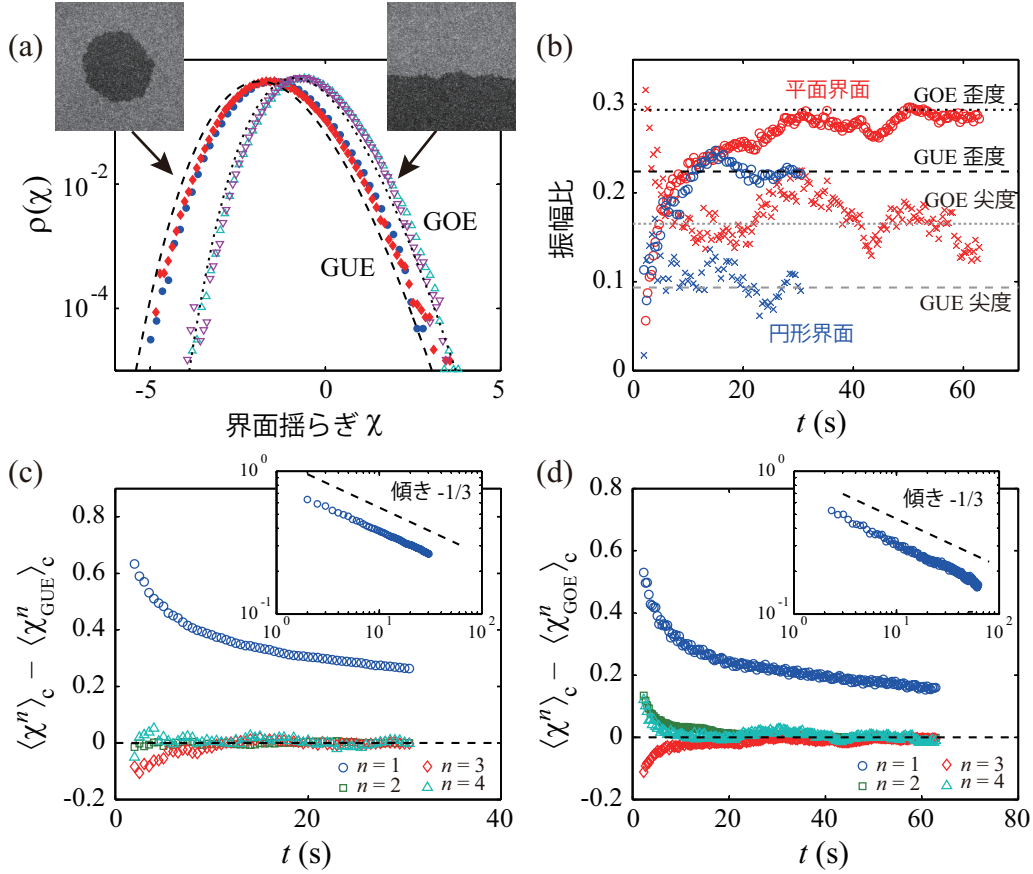


図 3: 界面の普遍揺らぎ。(a) リスケールした界面高さ  $\chi = (h - v_\infty t)/(\Gamma t)^{1/3}$  のヒストグラム。青と赤の中塗り記号 (○ と ×) は  $t = 10$  s と 30 s における円形界面の揺らぎを、水色と紫の中抜き記号 (○ と ×) は  $t = 20$  s と 60 s における平面界面の揺らぎを表す。破線と点線はそれぞれ GUE、GOE の Tracy-Widom 分布を示す。なお、GOE Tracy-Widom 分布の曲線は、可解数理モデルの予言 [21] に従い、 $2^{-2/3}$  倍されて描かれている。(b) 界面揺らぎの歪度 (○) と尖度 (×)。破線と点線は、GUE および GOE Tracy-Widom 分布の歪度と尖度 [21] を表す。(c, d) 界面揺らぎの  $n$  次キュムラント  $\langle \chi^n \rangle_c$  の実験値 [(c) 円形界面、(d) 平面界面] と、比較対象の Tracy-Widom 分布の値  $\langle \chi_{\text{GUE}}^n \rangle_c, \langle \chi_{\text{GOE}}^n \rangle_c$  との差。挿図は 1 次キュムラントの時系列を両対数プロットしたものである。破線は傾き  $-1/3$  を示す。

Tracy-Widom 分布に、少なくとも 4 次のキュムラントまでは完全に一致するのである。また、本結果により、分布関数の有限時間効果によるずれは 1 次キュムラントにおけるものが特に大きく、それは  $t^{-1/3}$  に比例することも判明した。

冒頭で示唆したとおり、成長界面の揺らぎに Tracy-Widom 分布を発見したのは本研究が初めてではなく、完全非対称単純排他過程 (TASEP)<sup>3</sup> の円形 (一般には曲率付き) 界面に対して Johansson が 2000 年に厳密に示したのが最初である [19]。その後同様の結論が多核成長 (PNG) モデル [21]、部分的非対称単純排他過程 (PASEP) [22]、さらには KPZ 方程式 [23–27]<sup>4</sup> でも厳密に示されている [3, 4]。また、平面界面に対しては、Prähofer と Spohn が PNG モデルに対して証明した [21] の

<sup>3</sup>ASEP は一般には交通流等のモデルと行うことができるが、各格子点における粒子の有無を界面の上り坂・下り坂に対応させることで界面成長のモデルととらえることもできる [20]。

<sup>4</sup>ただし、文献 [26, 27] の導出では Bethe 仮説を用いているので、全キュムラントの一致を分布関数の一致とみなすなどの仮定を要する。

を皮切りに、TASEP [28] と KPZ 方程式 [29] についてやはり証明されている。界面の揺らぎ分布が漸近的にランダム行列の最大固有値分布に一致し、それが普遍的であること、さらにそれが界面形状、言い換えれば初期条件によって異なる分布に漸近することは、(1+1)次元 KPZ クラスで判明した極めて非自明な結果である。その普遍性が数理モデルだけでなく、現実の実験系においても明確に現われたのは特筆すべき事実と言える。

## 5 Tracy-Widom 分布

最後に、界面揺らぎを記述する Tracy-Widom 分布について簡単に説明しておく。上で述べたように、これは純粋にランダム行列理論で導入され [17, 18]、議論されてきた分布である [15, 16]。

まず、 $N \times N$  の複素エルミート行列  $A$  を考える。すなわち、行列要素  $A_{ij}$  は  $\bar{A}_{ij} = A_{ji}$  を満たす。ここで各要素  $A_{ij}$  をガウス分布から独立に生成することで、 $A$  をランダム行列とする。具体的には、平均はゼロ ( $\langle A_{ij} \rangle = 0$ )、また分散は対角要素は  $\langle A_{ii}^2 \rangle = N$ 、非対角要素は  $\langle (\text{Re} A_{ij})^2 \rangle = \langle (\text{Im} A_{ij})^2 \rangle = N/2$  ( $i \neq j$ ) とする<sup>5</sup>。これにより、確率変数の重み分布は Boltzmann 分布  $\exp(-\frac{1}{2N} \text{Tr} A^2)$  によって簡潔に表現できる。以上が GUE の定義である。GOE も、 $A$  を実対称行列とすれば全く同様にして定義される。

ここで行列  $A$  は、GUE にせよ GOE にせよ  $N$  個の実固有値を持ち、それもやはり確率変数である。特に最大固有値  $\lambda_{\max}$  は、十分大きい  $N$  に対して

$$\lambda_{\max} \simeq 2N + N^{1/3} \chi \quad (5.1)$$

のようにスケールする。ここに現われる確率変数  $\chi$  の  $N \rightarrow \infty$  での確率密度関数こそが、図 3(a) で理論曲線として描かれた、GUE および GOE Tracy-Widom 分布である<sup>6</sup>。上の式 (5.1) と界面揺らぎの表式 (4.1) を比較すると、最大固有値  $\lambda_{\max}$  が界面高さ  $h$  に、行列サイズ  $N$  が界面成長の経過時刻  $t$  に対応することがわかるだろう。また、こうして定義された Tracy-Widom 分布は非常に豊かな数学的構造を持っている。GUE の場合  $\chi \equiv \chi_{\text{GUE}}$  を例に説明すると、まず、その積算分布関数は、Airy カーネル  $K(x, y) \equiv \int_0^\infty d\lambda \text{Ai}(x + \lambda) \text{Ai}(y + \lambda)$  ( $x, y$  は実数、 $\text{Ai}(\cdot)$  は通常の Airy 関数) を用いて、

$$\text{Prob}(\chi_{\text{GUE}} \leq s) = \det(1 - P_s K P_s), \quad (5.2)$$

のように表される。ここで、 $P_s$  は  $[s, \infty)$  への射影であり、 $P_s K P_s$  は  $s \leq x, y$  においてカーネル  $K(x, y)$  に一致するが、それ以外ではゼロとなる。式 (5.2) は Fredholm 行列式と呼ばれており、ランダム行列理論や界面成長の数理モデルの解析計算において重要な役割を果たしている。また、Tracy-Widom 分布は、特殊関数や可積分系の数理で登場する Painlevé 方程式とも直接的な関係を持つ。例えば、GUE Tracy-Widom 分布の積算分布関数  $\text{Prob}(\chi_{\text{GUE}} \leq s)$  は、Painlevé II 方程式  $u''(s) = 2u^3 + su + a$  で  $a = 0$  としたものの大域的正值解を  $u(s)$  として、 $g''(s) = u(s)^2$ 、 $s \rightarrow \infty$  で  $g(s) \rightarrow 0$  となる関数  $g(s)$  を用いて、 $\text{Prob}(\chi_{\text{GUE}} \leq s) = e^{-g(s)}$  と表現される [21]。GOE Tracy-Widom 分布についても、よく似た Fredholm 行列式や Painlevé II 方程式との関係を持つことが知られている [18]。

以上で紹介した Tracy-Widom 分布は、ランダム行列理論や界面成長問題の他にも、ランダム順列の単調増加部分列の最大長さ分布、不均一なポテンシャル中での異方的ポリマーの基底状態エネルギー分布など、数学、物理の様々な問題で登場することが近年わかってきており、その普遍性について大変興味を持たれている [30]。

<sup>5</sup>本稿では界面揺らぎとの対応をより明確にするため、分散を  $N$  に比例するよう定義している。これにより固有値間の平均的間隔が 1 のオーダーとなり、最大固有値の表式 (5.1) と界面揺らぎの表式 (4.1) をより比較しやすくなる。

<sup>6</sup>ただし、GOE Tracy-Widom 分布については、成長界面の可解モデルの予言 [21] に従い  $\chi$  を  $2^{-2/3}$  倍した分布関数を表示している。

## 6 むすびに

本稿では、液晶乱流の界面成長の実験結果を中心に、成長界面がなすスケール不変な揺らぎが極めて非自明かつ詳細な普遍性を示すことを紹介した。本稿では紙面の都合上、その揺らぎ分布がランダム行列の最大固有値分布に従うことのみを示したが、空間相関関数に関しても、数理モデルでも [31, 32] 本実験系でも [5, 7]、Airy 過程と呼ばれるプロセスの時間相関関数に一致することがわかっている。この相関関数も円形界面と平面界面とで異なる結論が得られる。円形界面の場合に対応する  $\text{Airy}_2$  過程は GUE ランダム行列の Dyson ブラウン運動 [15] における最大固有値のダイナミクスと一致するので、円形界面におけるランダム行列との対応は確率分布関数にとどまらない<sup>7</sup>。これらは単に関数形が定量的に異なるだけでなく、距離の離れた 2 点の相関が、円形界面では冪的減衰  $C(l) \sim l^{-2}$ 、平面界面では指数関数より速い減衰となり、質的な違いを伴うものである [33]。同様の質的な違いは、界面揺らぎの時間相関など、解析的には未だ解かれていない統計量についても本実験系で観測されている [7]。

成長界面の形状揺らぎにこれ程の奥深い統計則が隠れており、それが KPZ クラスにおいて普遍的に現われるということ、またランダム行列や Painlevé II 方程式の数理とも密接に関連することは、驚くべき事実と言って良いだろう。円形界面と平面界面が、スケーリング指数が同じでも、分布関数や相関関数のレベルでは異なる、しかも普遍的な形を取るということも、直感に反する不思議な、しかし数理モデルに対しては証明されている結果である。円形界面は時間の経過と共に曲率が小さくなっていくが、それでも初期条件に曲率があったという記憶は失われず、 $t \rightarrow \infty$  においても分布や相関に決定的な違いを与えるのである。

(1+1) 次元 KPZ クラスの界面成長における普遍揺らぎの一連の数理研究と実験研究を通して — まさに「現象と数理の相互作用」によって —、界面成長だけでなく、スケール不変な非平衡現象一般の普遍法則に関して、更に深い理論的・実験的理解が得られることを願うばかりである。

## 7 謝辞

本研究の取り組みにおいて、佐野雅己教授（東京大学）の実験協力、また、笹本智弘准教授（千葉大学）、Herbert Spohn 教授（ミュンヘン工科大学）、Michael Prähofer 博士（ミュンヘン工科大学）、Grégory Schehr 博士（オルセー大学）ら理論家との緊密な連携は本質的に重要でした。心より御礼を申し上げます。また、図 3(a,b) に示した Tracy-Widom 分布の理論曲線と理論値は Michael Prähofer 博士の好意により譲り受けたものです。最後に、研究会「非線形波動研究の進展 - 現象と数理の相互作用 -」に招待頂き、講演と本講執筆の貴重な機会を与えてくださいました、筧三郎教授、辻英一助教はじめ組織委員会の方々に改めて感謝を申し上げます。

## 参考文献

- [1] A.-L. Barabasi and H. E. Stanley: “Fractal Concepts in Surface Growth”, Cambridge Univ. Press (1995).
- [2] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang: “Dynamic scaling of growing interfaces”, Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 889.
- [3] T. Kriecherbauer and J. Krug: “A pedestrian’s view on interacting particle systems, KPZ universality and random matrices”, J. Phys. A **43** (2010), 403001.

<sup>7</sup>平面界面の場合に現われる  $\text{Airy}_1$  過程 [32] は GOE ランダム行列の Dyson ブラウン運動とは一致しないことが知られている [33]。

- [4] T. Sasamoto and H. Spohn: “The 1 + 1-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation and its universality class”, *J. Stat. Mech.* (2010), P11013.
- [5] K. A. Takeuchi and M. Sano: “Universal fluctuations of growing interfaces: evidence in turbulent liquid crystals”, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), 230601.
- [6] K. A. Takeuchi, M. Sano, T. Sasamoto, and H. Spohn: “Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale invariance”, *Sci. Rep. (Nature)* **1** (2011), 34.
- [7] K. A. Takeuchi and M. Sano: “Evidence for geometry-dependent universal fluctuations of the Kardar-Parisi-Zhang interfaces in liquid-crystal turbulence”, arXiv:1203.2530 (2012).
- [8] P. G. de Gennes and J. Prost: “The Physics of Liquid Crystals”, 2nd ed., Oxford Univ. Press (1995).
- [9] F. Family and T. Vicsek: “Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model”, *J. Phys. A* **18** (1985), L75.
- [10] J. Wakita, H. Itoh, T. Matsuyama, and M. Matsushita: “Self-affinity for the growing interface of bacterial colonies”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (1997), 67.
- [11] M. A. C. Huergo, M. A. Pasquale, A. E. Bolzán, A. J. Arvia, and P. H. González: “Morphology and dynamic scaling analysis of cell colonies with linear growth fronts”, *Phys. Rev. E* **82** (2010), 031903.
- [12] M. A. C. Huergo, M. A. Pasquale, P. H. González, A. E. Bolzán, and A. J. Arvia: “Dynamics and morphology characteristics of cell colonies with radially spreading growth fronts”, *Phys. Rev. E* **84** (2011), 021917.
- [13] J. Maunuksela *et al.*: “Kinetic roughening in slow combustion of paper”, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), 1515.
- [14] M. Myllys *et al.*: “Kinetic roughening in slow combustion of paper”, *Phys. Rev. E* **64** (2001), 036101.
- [15] M. L. Mehta: “Random Matrices”, 3rd ed., Elsevier (2004).
- [16] 永尾太郎: “ランダム行列の基礎”, 東京大学出版会 (2005).
- [17] C. A. Tracy and H. Widom: “Level-spacing distributions and the Airy kernel”, *Commun. Math. Phys.* **159** (1994), 151.
- [18] C. A. Tracy and H. Widom: “On orthogonal and symplectic matrix ensembles”, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996), 727.
- [19] K. Johansson: “Shape fluctuations and random matrices”, *Commun. Math. Phys.* **209** (2000), 437.
- [20] 笹本智弘: “ランダム結晶成長とヤング図形”, *数理科学* **523** (2007), 39.
- [21] M. Prähofer and H. Spohn: “Universal distributions for growth processes in 1+1 dimensions and random matrices”, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000), 4882.



- [22] C. A. Tracy and H. Widom: “Asymptotics in ASEP with step initial condition”, *Commun. Math. Phys.* **290** (2009), 129.
- [23] T. Sasamoto and H. Spohn: “One-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation: an exact solution and its universality”, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), 230602.
- [24] T. Sasamoto and H. Spohn: “Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition”, *Nucl. Phys. B* **834** (2010), 523.
- [25] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel: “Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in 1+1 dimensions”, *Commun. Pure Appl. Math.* **64** (2011), 466.
- [26] P. Calabrese, P. Le Doussal, and A. Rosso: “Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature”, *Europhys. Lett.* **90** (2010), 20002.
- [27] V. Dotsenko: “Bethe ansatz derivation of the Tracy-Widom distribution for one-dimensional directed polymers”, *Europhys. Lett.* **90** (2010), 20003.
- [28] A. Borodin, P. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto: “Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration”, *J. Stat. Phys.* **129** (2007), 1055.
- [29] P. Calabrese and P. Le Doussal: “Exact solution for the Kardar-Parisi-Zhang equation with flat initial conditions”, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011), 250603.
- [30] V. Dotsenko: “Universal randomness”, *Phys.-Usp.* **54** (2011), 259.
- [31] M. Prähofer and H. Spohn: “Scale Invariance of the PNG Droplet and the Airy Process”, *J. Stat. Phys.* **108** (2002), 1071.
- [32] T. Sasamoto: “Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate”, *J. Phys. A* **38** (2005), L549.
- [33] F. Bornemann, P. Ferrari, and M. Prähofer: “The  $\text{Airy}_1$  Process is not the Limit of the Largest Eigenvalue in GOE Matrix Diffusion”, *J. Stat. Phys.* **133** (2008), 405.