特集／数理モデルと普遍性

自己駆動粒子の集団運動

群れからはじまる非平衡統計力学

西口 大貴・佐野 雅己

1. 集団運動とは？

自然界には，自ら動くものが群れをなして，集団として一定の方向に進んだり，パターンを作ったりする現象が数多く存在する．たとえば，空では鳥が群れをなしてある方向に飛んで行き，水族館では魚の大群が大きな渦を作り，牧場では羊の群れがまるで意志を持つかのように一塊となって牧羊犬から逃げ回っている．ミクロな世界では，バクテリアはコロニーの中でクラスターを作って泳いでいる．本稿では，このような「自ら動くもの」＝**自己駆動粒子**の群れ運動，特に粒子数が非常に多いときに現れる巨視的な運動状態を，集団運動と呼ぶことにしよう．集団運動や個々の自己駆動粒子の動力学を考える分野は**アクティブ・マター**と呼ばれ，近年，盛んに研究がおこなわれている．

集団運動を非平衡統計力学の立場から眺めると，いろいろと疑問が湧いてくる．群れの一員である魚やバクテリアは，自分の周囲しか見えていないはずなのに，なぜ群れ全体として統制の取れた運動を示せるのだろうか？自然界に見られる集団運動には，普遍性が存在するのだろうか？

本稿では，集団運動の理解へ向けた理論的取り組みとして，その数理モデルと連続場記述を紹介する．そこには平衡系にはない興味深い特徴が見られる．最後に，集団運動の理解に向けた実験的アプローチと最近の展開についても紹介する．

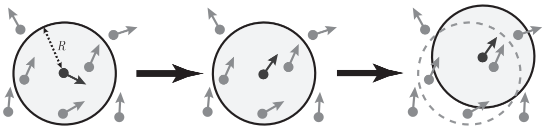

図 1　Vicsek モデルの各粒子は，自分の周りの半径 R 内の粒子の平均の向きに進もうとする．

2. 集団運動のモデル

自己駆動粒子の集団運動を記述する最も単純な数理モデルが，Vicsek（ヴィチェック）モデルだ．1995 年に Tamás Vicsek が発表した離散時間確率モデル[1)]であり，これを契機として非平衡統計力学の一分野として集団運動の研究が盛んになされるようになった．

Vicsek モデルの詳細は，次の通りだ．動き回る N 個の自己駆動粒子がいるとする．強磁性体のモデルである古典 XY モデル [*1)] において，個々のスピンを矢印で単純化することで本質を抜き出したのと同様，Vicsek モデルでは図 1 のように個々の自己駆動粒子を運動の向きを示す矢印で表す [*2)]．各粒子の体積は考えず，点粒子であるとする．各粒子は，一定の速さ v_0 で矢印の向きに毎ステップ移動する．矢印の向きは，自分の周り半径 R を見渡して，そこにいる仲間たちと自分の平均の向き

*1)　2 次元格子上の各スピンを，連続的に回転する矢印表したモデル．i 番目のスピンの位相を θ_i として，ハミルトニアンは $H = -J\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i - \theta_j)$ で与えられる．

*2)　Vicsek モデルは「動き回る古典 XY モデル」と見なせる．

に揃えようとする．ただし，平均の向きに完全に揃えることはできず，ある程度のゆらぎがあるとする．簡単のため，以下では特に断らない限り，周期境界条件をもつ $L \times L$ の 2 次元空間で考えることとする．3 次元以上への拡張は簡単である．

定義 1（Vicsek モデル）

$$\theta_j^{t+1} = \arg \sum_{k \sim j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k^t} + \eta_j^t \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}_j^{t+1} = \boldsymbol{r}_j^t + v_0 \boldsymbol{e}_{\theta_j^{t+1}} \tag{2}$$

時間発展の 1 ステップを単位時間とした．$\boldsymbol{r}_j^t$ と θ_j^t は j 番目の個体の時刻 t における位置と向きを，$\boldsymbol{e}_{\theta_j^{t+1}}$ は θ_j^{t+1} 方向の単位ベクトルを，arg は複素数の偏角を表す．η_j^t は，区間 $[-\eta/2, -\eta/2]$ 上に一様分布するホワイトノイズである．和の範囲 $k \sim j$ は j から相互作用半径 R 内に存在する粒子（自分を含む）について和を取ることを示している．

以下では，この単純化されたモデルの示す，豊かな統計力学的性質を見ていこう．

3. Vicsek モデルの性質

3.1 秩序・無秩序転移

まず定性的に，Vicsek モデルがどのような振る舞いを示すのか考えてみよう．Vicsek モデルは，近隣の粒子と向きを揃えるような相互作用をしているため，ノイズ強度が十分弱ければ全体として向きが揃った秩序相が実現するはずである．逆にノイズが強すぎると，個々の粒子は乱雑な運動をしてしまい，群れとして方向性を持った運動を示さない無秩序相となる（図 2）．

マクロな振る舞いの異なる相の間の移り変わりはどうなっているのだろうか？まず，この非平衡相転移が，連続転移なのかそれとも不連続転移なのか[*3)]，というのが根本的な問いとして出てくる．

Vicsek モデルの秩序・無秩序転移を考えるときのパラメータや秩序変数は何だろうか？Vicsek モデルには，パラメータとして駆動速度 v_0, 相互作用半径 R, ノイズ強度 η，粒子数密度 $\rho := N/L^2$ が存在する．$v_0 > R$ とすると，すれ違っても相互作用をしない粒子が存在してしまうため，$v_0 \leq R$ と取る必要がある．そこで，$R = 1$, $v_0 \simeq 1/2$ としても一般性を失わない．したがって，η と ρ が重要なパラメータである．ρ の大小は一度に相互作用する粒子数を与えるため，相互作用の強弱に対応し，η は平衡系での温度に対応する．これらを変化させたときのマクロな相の様子を見れば良い．粒子が向きを揃えて進んでいるかどうかは，古典 XY モデルの磁化と同様に，次の秩序変数で定量化できる．

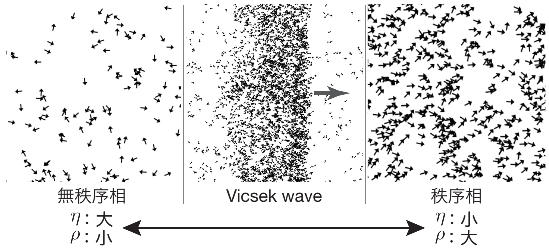

図 2　ノイズ強度 η と粒子数密度 ρ の大小による Vicsek モデルの振る舞いの変化．図は Hugues Chaté 氏提供．

$$\varphi^t = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^t} \right| \tag{3}$$

これは速度ベクトルの向き $\boldsymbol{e}_{\theta_j^t}$ の平均の絶対値に等しい．この φ^t は時間的にゆらぐので，実際は定常状態における時間平均 $\langle \varphi \rangle_t$ が，パラメータ η と ρ によってどう変化するかを見れば良い．

結論として，現在では，Vicsek モデルは不連続転移を示すことが分かっている．Vicsek らがこのモデルを導入した 1995 年当初は数値計算のシステムサイズが小さかったため，転移点での振る舞いがなまってしまっていたが，後の大規模計算により，システムサイズを大きくするにつれて転移点での秩序変数 $\langle \varphi \rangle_t$ の変化が鋭く不連続的になっていくことが分かった[*4)]（図 3）．転移点では，不

*3)　相転移の前後で，系のマクロな相を特徴付ける秩序変数の値が連続的に変化するのか，不連続な飛びが生じるのか，ということ．それぞれ，2 次転移，1 次転移とも言う．

*4)　より正確には，数値計算で有限サイズ効果の評価に用いられる Binder キュミュラントを用いることにより，連続転移ではなく不連続転移であることが明確に示されている[2]．

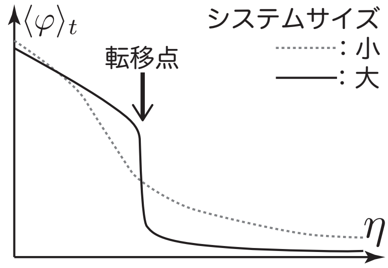

図 3 ノイズ強度 η に対する秩序変数 $\langle\varphi\rangle_t$ の転移点での振る舞いは，システムサイズを大きくしていくにつれて，不連続転移の特徴を示すようになる．

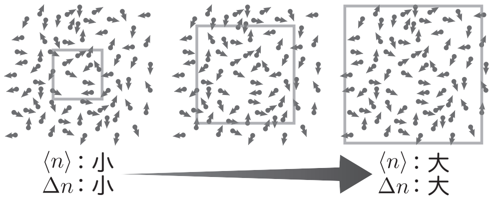

図 4 視野サイズを変えて，観測される粒子数の平均値 $\langle n\rangle$ と標準偏差 Δn の関係を見る．

連続転移の性質を反映して，秩序相と無秩序相の二相共存が見られる．この二相共存状態では，向きの揃った粒子の成す複数のバンドが無秩序相中を飛んでいく（図 2 中央）．このようなバンドは **Vicsek wave** と呼ばれている．

なお，Vicsek モデルの秩序相は長距離秩序を持つことが分かっている．Vicsek モデルは無秩序相では回転対称性を持つが，秩序相では回転対称性を自発的に破っている．2 次元以下の平衡系では，回転対称性のような連続対称性が破れた長距離秩序相は存在しないことが示されている（Mermin-Wagner の定理）．そのため，平衡系の古典 XY モデルでは長距離秩序は見られず，代わりに相関関数がべき的に減衰する準長距離秩序が見られる．つまり，Vicsek モデルの長距離秩序相はモデルの非平衡性に由来している．個々の粒子が動き回ることにより，相互作用をする粒子が常に入れ替わっており，実効的な相互作用が遠くまで及ぶようになると考えられている．これにより，粒子の向きのゆらぎが抑制され，長距離秩序相が実現する[3]．Vicsek モデルの秩序相が長距離秩序を持つことは，後で述べる連続場記述でも証明されている．

3.2 巨大な粒子数ゆらぎ

集団運動において最も頻繁に議論されるものが，**巨大な粒子数ゆらぎ (giant number fluctuation)** だ．まず，粒子数ゆらぎとは何かを整理しよう．ある決まった大きさの視野内で時刻 t に観測される粒子数 $n(t)$ を考える．これは確率的に変動する量である．この時系列の平均値 $\langle n\rangle$ とゆらぎ（標準偏差）$\Delta n = \sqrt{\langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle}$ を考える [*5]．

観察視野が大きくなるにつれて，$\langle n\rangle$ も Δn も大きくなる．平衡状態や完全に乱雑な系では大数の法則が成り立つため，両者の間には $\Delta n \propto \langle n\rangle^{0.5}$ という関係がある．では，Vicsek モデルではどうなるだろうか？転移点から十分離れた秩序相においては，粒子は一様に分布しているように見える．しかし，この秩序相において粒子数ゆらぎを測ると，およそ $\Delta n \propto \langle n\rangle^{0.8}$ と，大数の法則が成り立つ系での通常のゆらぎよりも大きなゆらぎが見られる．これが巨大な粒子数ゆらぎである．もちろん，無秩序相では，系が乱雑なため大数の法則が成り立ち，通常の 0.5 乗のゆらぎが得られる．

指数が 0.8 に近い値をとることは，大規模な数値計算で確認されている（図 5）．また，連続場記述において，ある近似の下で動的くりこみ群の手法を用いることにより，2 次元の Vicsek モデルに対しては 0.8 という指数が導出されている[4]．

巨大な粒子数ゆらぎが生じる理由は，粒子の向きのゆらぎが次の時間の密度のゆらぎに乗ってくるということで理解できる．数理的には，Vicsek モデルの集団運動は，回転対称性が自発的に対称性の破れた相であるため，全粒子の平均の速度の向き（集団運動の向き）と垂直な方向への速度ゆらぎは，復元力の無い南部・Goldstone モードとなる．これが長波長の大きなゆらぎが生じさせ，巨大な粒子数ゆらぎとして観測される．

3.3 異常拡散

ここまで，粒子の集団の性質を見てきた．次は，集団運動をしている個々の粒子の振る舞いに目を

*5) 時間平均の代わりに，空間平均を用いても良い．ここでは，多くの実験において測定しやすい時間平均で説明する．

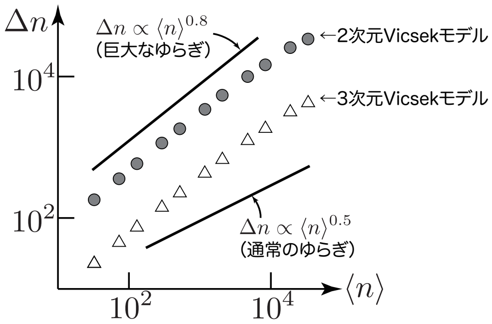

図 5　Vicsek モデルの粒子数ゆらぎは，0.8 に近い指数を持つ．データは文献[2)] の値を用いた．

移そう．秩序相における個々の粒子の運動を評価するために，平均二乗変位を考える．平均の速度の向きと垂直な方向へは，粒子はあまり動いていないように思えるが，垂直方向の平均二乗変位，

$$\Delta \boldsymbol{r}_\perp^2 := \left\langle [\boldsymbol{r}_\perp(t) - \boldsymbol{r}_\perp(0)]^2 \right\rangle \qquad (4)$$

は興味深い振る舞いをする．ただし，$\boldsymbol{r}_\perp(t)$ は粒子の座標のうち，平均の速度の向きと垂直な方向の成分である．平均 $\langle\ \rangle$ は統計平均を表す．ここで問題とするのは，$\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2$ の長時間での振る舞い $\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2 \sim t^\nu$ の指数 ν である．ブラウン運動などの通常拡散ではこれは $\nu = 1$ となるが，2 次元の Vicsek モデルでは $\nu = 4/3$ となり，異常拡散の性質を持つ[2)]．

この指数 ν も，2 次元の場合は連続場記述から導出されている[4)]．巨大な粒子数ゆらぎと同様，異常拡散も南部・Goldstone モード由来である．

4. 流体方程式による記述

Vicsek モデルは解析的に扱いづらいため，連続場記述が考案された．各粒子を流体粒子と見なして粗視化した速度場 $\boldsymbol{v}$ と粒子数密度場 ρ の方程式として，対称性から許される項を時間・空間微分の最低次まで残すことで，Navier-Stokes 方程式に似た現象論的な方程式を立てることができる．

$$\begin{aligned}&\partial_t\boldsymbol{v}+\lambda_1(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}+\lambda_2(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}+\lambda_3\boldsymbol{\nabla}(|\boldsymbol{v}|^2)\\ &=\alpha\boldsymbol{v}-\beta|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nabla}P+D_B\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\\ &\qquad+D_T\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}+D_2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})^2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}, \qquad (5)\end{aligned}$$

$$P = P(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(\rho-\rho_0)^n, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{v}\rho) = 0. \qquad (7)$$

ただし，式 (5) の係数はすべて平均密度 ρ_0 に依存し，β, D_B, D_T, D_2 は正の値をとる．$\boldsymbol{f}$ はノイズを表す．式 (6) は圧力を密度ゆらぎ $\rho-\rho_0$ について展開した式であり，式 (7) は粒子数が保存するという連続の式である．この流体方程式を **Toner-Tu モデル**と呼ぶ[4)]．

式 (5) の意味は次の通りである．λ の項は，Navier-Stokes 方程式の移流項に対応する．自己駆動粒子系は，魚や羊の群れなどを想像すると，水や地面の静止系という絶対座標系が存在する．そのため，ガリレイ不変性を持たず，運動量が保存しない．結果として，Navier-Stokes 方程式には存在しない λ_2, λ_3 の項も現れ，$\lambda_1 = 1$ 以外も許される．また，D_B, D_T, D_2 の項は，粒子間の相互作用により速度ベクトルのゆらぎが伝わっていくという拡散を表す．$-\boldsymbol{\nabla}P$ は圧力項である．最も重要なのは，残りの $\alpha\boldsymbol{v}-\beta|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{v}$ の項だ．これは Ginzburg-Landau 理論に現れるのと同様の項で，解として，$\alpha > 0$ の場合は $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\alpha/\beta}$ を，$\alpha \le 0$ で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を与える．つまり，α の符号変化で，秩序・無秩序転移を記述できる [*6)]．

この方程式に動的くりこみ群の手法を用いることで，粒子数ゆらぎ・異常拡散の指数とそれらの関係を導ける．特に，2 次元系の場合には，式 (5) の λ_1 と λ_2 の項が等しくなるなど非線形項が減るため，厳密な指数を導ける．また，2 次元で長距離秩序を持つことも証明できる．

この現象論的アプローチでは，各係数が Vicsek モデルのミクロな方程式の変数にどのように依存するのかは分からない．そのため，ボルツマン方

*6)　ただし，高次の項をおとしているため，転移点近傍での振る舞いしか正確には記述できていない．

程式を用いて流体方程式を導出する試みがなされている．計算過程での二体衝突の仮定や高次の項の打ち切りなどのために，流体方程式において対称性から許されるはずの項が一部足りないなどの問題もあるものの，大部分の項の依存性を導くことに成功している[5)]．

5. 対称性の異なるモデルと現象

Vicsek モデルでは，個々の粒子に頭と尾があり，運動方向も相互作用も極性があった．ここでは，これらの極性をなくした新たなモデルも考えてみよう．すると，表 1 のように，対称性の異なる 3 つのモデルに分類できる [*7)]．新たに定義した 2 つのモデルは，次のような時間発展をする．

定義 2（active nematics[6)]）

$$\theta_j^{t+1} = \frac{1}{2}\arg\sum_{k\sim j} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_k^t} + \eta_j^t \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}_j^{t+1} = \boldsymbol{r}_j^t \pm v_0 \boldsymbol{e}_{\theta_j^{t+1}} \tag{9}$$

$\pm$ の符号は毎ステップそれぞれ 1/2 の確率で選ぶ．式 (9) の指数の肩に 2 がかかっているのに注意．

定義 3（self-propelled rods[7)]）

$$\theta_j^{t+1} = \arg\sum_{k\sim j} \mathrm{sign}\left[\cos(\theta_k^t - \theta_j^t)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k^t} + \eta_j^t \tag{10}$$

$$\boldsymbol{r}_j^{t+1} = \boldsymbol{r}_j^t + v_0 \boldsymbol{e}_{\theta_j^{t+1}} \tag{11}$$

両者とも，ネマチック (nematic) 相互作用 [*8)] を θ の方程式に与えている．Active nematics は，前後に行ったり来たりの運動をする棒のモデルであり，実験的にはプレート上に敷き詰めた棒状粒子を鉛直方向に加振した系に対応する．Self-propelled rods は，各粒子が自分の頭の向きに進みながら，衝突して向きを平行もしくは反平行に揃えていく状況を模している（図 6）．これは，ある種のバクテリアをイメージしている．

*7） 運動は極性を持たない，つまり粒子自身に極性は無いが，相互作用には極性があるという特殊な状況は排除している．

*8） 前後のない対称な棒状の粒子が，長軸を平行に揃えようとする相互作用．液晶分子などで見られる．

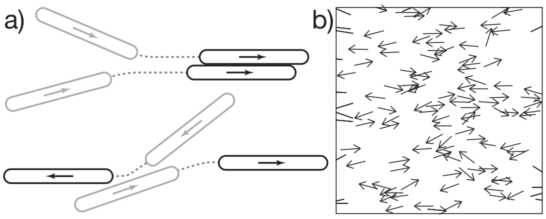

図 6 Self-propelled rods での (a) 相互作用と (b) 秩序相の様子．

これらのモデルについても，Vicsek モデルで考えた性質を見てみよう．まず，active nematics も self-propelled rods も，不連続転移を示す．転移点では，秩序相が無秩序相中にバンド状に現れる．Vicsek wave と異なり，これらのモデルのバンドは不規則に変形し，ちぎれたり結合したりと，カオス的変動を示す．

秩序相中での巨大な粒子数ゆらぎは，どちらのモデルでも見られ，数値計算により 0.8 乗に近い値をとることが分かっている．Vicsek モデル同様，Toner-Tu モデルのような流体記述はできるが，液晶のテンソル秩序変数を含み複雑なため，Toner-Tu モデルのような解析的結果は得られていない．

これらのモデルの最も重要な違いは，長距離秩序の有無だ．active nematics や self-propelled rods のようにネマチック相を発現する系では，ネマチック秩序変数 $S = \frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_j^t}\right|$ の時間平均 $\langle S \rangle_t$ が秩序変数として振る舞う．システムサイズを大きくする極限での $\langle S \rangle_t$ の振る舞いから，長距離秩序の有無を判断できる．結果，active nematics ではシステムサイズを大きくするとともに，$\langle S \rangle_t$ がべき的に減衰する準長距離秩序を示し，一方 self-propelled rods では正の値に収束する長距離秩序を持つことが分かる．粒子の対称性によって，長距離秩序が実現できるかどうかが変化するのだ．

6. 実験によるアプローチ

鳥や魚の群れから始まった集団運動研究は，数理モデルの統計力学的性質を明らかにしてきた．では，これらの性質を実際の群れや実験で観測で

表 1　対称性の異なる 3 つのモデル

	Vicsek モデル	active nematics	self-propelled rods
運動方向	極性あり	無極性	極性あり
相互作用	極性あり	無極性	無極性
秩序相	長距離秩序	準長距離秩序	長距離秩序
粒子数ゆらぎの指数	0.8（数値計算・理論）	0.8 に近い（数値計算）	0.8 に近い（数値計算）

きるのか，というのは重要な問題だ．

Vicsek モデルのようにノイズ強度や密度を制御した実験を，鳥や魚でおこなうことは困難だ．そこで，単純な生物であるバクテリア[8] や自ら動く人工的な粒子を用いて，制御可能な実験が考案されてきた．人工的な粒子は，たとえば非対称な円盤をプレート上に敷き詰めて加振することで実現できる[9]．紙相撲の原理だ．あるいは，コロイド粒子を 2 次元電極に挟んで電場を加えることで，粒子を電場とは垂直な方向に（電極と平行な平面内を）動き回らせることができる[10, 11)*9]．他には，分子モーターによって駆動されたフィラメント状たんぱく質の実験系[12, 13] などもある．

これらの実験系で巨大な粒子数ゆらぎが観測されたとの報告が複数存在する．しかし，その多くが，モデルの数値計算や Toner-Tu モデルの帰結である「一様な秩序相中での粒子数ゆらぎ」を見ている訳ではない．これらの実験系では，実験系が小さいために境界の影響を強く受けてしまっていたり，クラスターが飛び交っていたりする状況下でゆらぎを測定してしまっている．クラスターが飛び交っていると，クラスターが視野内に居るときと居ないときで粒子数が激しくゆらぐため，自明に巨大なゆらぎが生じてしまう．理論的に意義があるのは，一様な秩序相での粒子数ゆらぎであり，これに関する満足な実験はなされていない．これは，粒子数ゆらぎの指数の決定のためにも重要であり，筆者らもこれに取り組んでいる[14]．

このように，実験の立場から見ると，アクティブ・マターの物理は，非平衡統計力学，流体力学，微生物学，コロイド科学，分子生物学などあらゆる分野が交錯するエキサイティングな分野である．

*9）外から加えている電場に垂直な向きに各粒子が自分で対称性を破って駆動するため，外場に引っ張られて動く電気泳動とは異なり，自己駆動していると言える．

7. さらなる発展

ここで紹介した集団運動の 3 つの基本的なモデルの興味深い統計力学的性質は，自己駆動粒子系の実験に様々な視点を与えてきた．実際の現象をさらに詳細まで再現するために，排除体積を考える・相互作用を工夫する・進行方向にメモリー効果を加える[15, 16] など，各モデルの様々な変種が考えられている．これらにより，実験的に観察されていたバクテリアの作る乱流状態やフィラメント状たんぱく質の作る渦状格子[13] の，モデルでの再現がなされている．

また，Vicsek モデルなど空間内を自由に動き回るモデルは，解析的・数値的なアプローチが難しい．そこで，Ising モデルでスピンが格子上を飛び回っていく Active Ising モデルが考案され[17]，その秩序・無秩序転移の様子が調べられた．離散対称性を持つ Active Ising モデルと連続対称性を持つ Vicsek モデルの比較により，Vicsek wave に複数のバンドが現れるのは，Vicsek モデルの連続対称性に由来していることなどが，つい最近分かってきている．

1995 年の Vicsek モデルに始まり，20 年間で集団運動の数理の理解は大きく進んできている．今後，大空の鳥の群れや水族館の魚の群れを見るたびに，集団運動の背後にある数理とその今後の発展に，ぜひ思いを馳せていただきたい．

参考文献

1) T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shocher: *Phys. Rev. Lett.* **75**, 6 (1995).
2) H. Chaté, F. Ginelli, G. Grégoire, F. Raynaud:

Phys. Rev. E, **77**, 046113 (2008).
3) S. Ramaswamy: *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, **2010.1**, 323 (2010).
4) J. Toner, Y. Tu: *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 23 (1995). J. Toner, Y. Tu: *Phys. Rev. E*, **58**, 4 (1998).
5) A. Peshkov, E. Bertin, F. Ginelli, H. Chaté: *Eur. Phys. J. Special Topics*, **223**, 1315 (2014).
6) S. Ngo, A. Peshkov, I.S. Aranson, E. Bertin, F. Ginelli, H. Chaté: *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 038302 (2014).
7) F. Ginelli, F. Peruani, M. Bär, H. Chaté: *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 184502 (2010).
8) H.P. Zhang, Avraham Be'er, E.-L. Florin, H.L. Swinney: *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **107**, 31, 13626 (2010).
9) J. Deseigne, O. Dauchot, H. Chaté: *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 098001 (2010).
10) A. Bricard, J.-B. Caussin, N. Desreumaux, O. Dauchot, D. Bartolo: *Nature*, **503**, 95 (2013).
11) D. Nishiguchi, M. Sano: arXiv:1506.06591 [cond-mat.soft] (2015), submitted.
12) V. Schaller, A.R. Bausch: *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **110**, 12, 4488 (2012).
13) Y. Sumino, K.H. Nagai, Y. Shitaka, D. Tanaka, K. Yoshikawa, H. Chaté, K. Oiwa: **Nature**, **483**, 448 (2012).
14) 西口大貴，佐野雅己：高アスペクト比のバクテリアのネマチックな集団運動，日本物理学会 2015 年秋季大会，19pCX-3.
15) N. Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, M. Sano: *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 20 (1996).
16) K.H. Nagai,Y. Sumino, R. Montagne, I.S. Aranson, H. Chaté: *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 168001 (2015).
17) A.P. Solon, H. Chaté, J. Tailleur: *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 068101 (2015).

（にしぐち・だいき，東京大学大学院理学系研究科）
（さの・まさき，東京大学大学院理学系研究科）